التفاضل والتكامل 1

المحاضرة الاولى

بعض المفاهيم الاساسية في التفاضل

الاعداد الحقيقية (R) :The real numbers

تحتوي مجوعة الاعداد الحقيقية على عدد من المجموعات الجزئية :

1- الاعداد الطبيعية (N) : The Natural numbers N={1, 2, 3, …}

2- الاعداد الصحيحة (I OR Z) :The Integer numbers I OR Z ={ …, -2 , -1 , 0, 1, 2, … }

3- الاعداد النسبية (Q) :The Rational numbers وهي كل الاعداد التي تكتب على شكل

$\frac{a}{b}$ ، b, a اعداد صحيحة بحيث ان $b \neq 0$. Q = { x∈ R: $x = \frac{p}{q}$, p, q ϵ $Z, q \neq 0$ }

4- الاعداد الغير نسبية (Q') The Irrational numbers : وهي كل الاعداد التي لايمكن ان تكتب على شكل كسر اعتيادي او كسر عشري منته او كسر دوري (متكرر) .

$\frac{5}{2} = 2.5$ كسر عشري منته (عدد نسبي)

$\frac{2}{9} = 0.222222222222$ كسر عشري دوري متكرر (عدد نسبي)

$\sqrt{4} = 2$ (عدد نسبي)

$\pi = 3.142857142857143$ كسر عشري غير منته وغير دوري (عدد غير نسبي)

$\sqrt{2} = 1.414213562373$ كسر عشري غير منته وغير دوري (عدد غير نسبي)

$\sqrt[3]{9} = 2.080083823051904$ كسر عشري غير منته وغير دوري (عدد غير نسبي)

كل الاعداد التي ليست لها جذر تربيعي (ليست مربع كامل) اعداد غير نسبية مثل $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{2}$

كل الاعداد التي ليست لها جذر نكعيبي (ليست مكعب كامل) اعداد غير نسبية مثل $\sqrt[3]{10}$ $\sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{9}$

$$N \sqsubset I \sqsubset Q \sqsubset R$$
$$R = Q \cup Q'$$

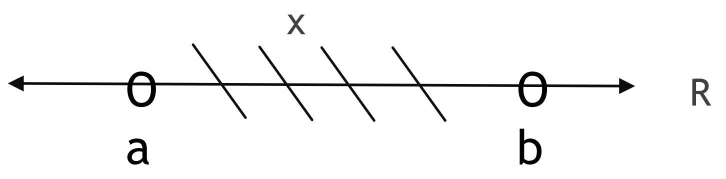
الفترات :   Intervals

1) الفترات المنتهية :   Finite Intervals

a) الفترة المفتوحة :

Open interval = $\{x \in R : a < x < b\} = (a\,, b)$

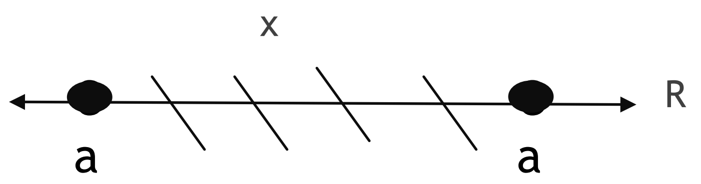
$a \notin (a,b)$, $b \notin (a,b)$



a) الفترة المغلقة :   Closed interval

Closed interval = $\{x \in R : a \le x \le b\} = [a\,, b]$

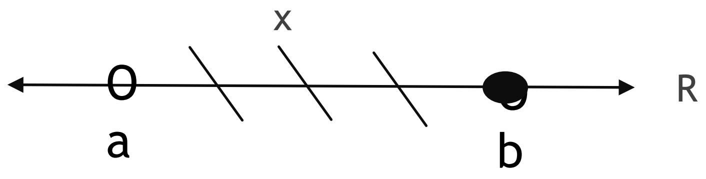
$a \in [a,b]$, $b \in [a,b]$



c) الفترة نصف مفتوحة : The half open interval

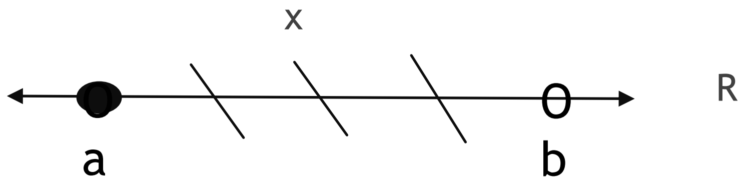
The half open interval from the left = $\{x \in R: a < x \leq b\} = (a\ ,b]$

$a \notin (a,b] \quad , \ b \in (a,b]$



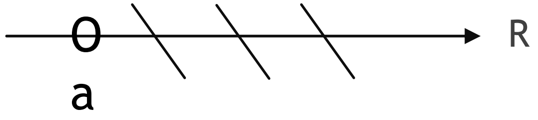
The half open interval from the right = $\{x \in R: a \leq x < b\} = [a\ ,b)$

$a \in [a,b) \quad , \ b \notin [a,b)$

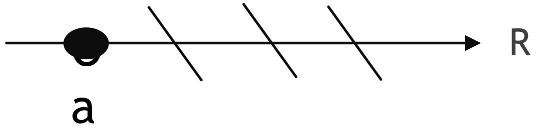


2) الفترات الغير المنتهية : Infinite Intervals

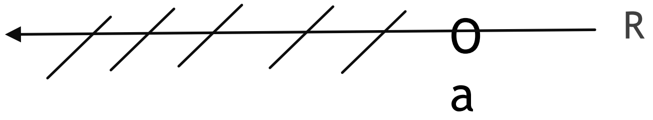
a) $\{x \in R: x > a\} = \{x \in R: a < x < \infty\} = (a, \infty)$



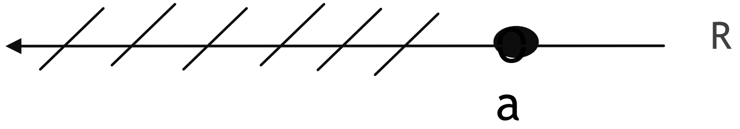
b) $\{x \in R: x \geq a\} = \{x \in R: a \leq x < \infty\} = [a, \infty)$



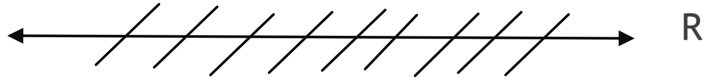
c) $\{x \in R: x < a\} = \{x \in R: -\infty < x < a\} = (-\infty, a)$



d) $\{x \in R: x \leq a\} = \{x \in R: -\infty < x \leq a\} = (-\infty, a]$



e) $\{x \in R: -\infty < x < \infty\} = (-\infty, \infty) = R$



التفاضل والتكامل 1

المحاضرة الثانية

المتباينات INEQUALITIES

و

القيمة المطلقة ABSOLUTE VALUE

Inequalities : المتباينات

لكل a ينتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقة . فاذا كانت a اكبر من b فتكتب بالشكل $a > b$.

واذا كانت a اصغر من b فتكتب بالشكل $a < b$.

خواص المتباينات : لكل a, b, c تنتمي الى R فأن :

1) If $a < b \quad \rightarrow \quad a + c < b + c$

2) If $a < b \;,\; c > 0 \quad \rightarrow \quad ac < bc$

3) If $a < b \;,\; c < 0 \quad \rightarrow \quad ac > bc$

Example 1 : solve the following inequality $3\,(x + 2) < 5$.

Solution: $3x + 6 < 5 \rightarrow 3x < 5 - 6$

$\rightarrow 3x < -1$

$\rightarrow x < \frac{-1}{3}$

$s.\,s = \left\{x \in R : x < \frac{-1}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{-1}{3}\right)$

Example 2 : solve the following inequality $x^2 < 25$.

Solution: $x^2 < 25 \rightarrow x^2 - 25 < 0$

$\rightarrow (x-5)(x+5) < 0$

لكي يكون حل المتباينة اقل من الصفر فأن اشارة القوسين مختلفة .

$* \quad (x+5) > 0 \quad \land \quad (x-5) < 0$

$x > -5 \quad \land \quad x < 5$

$s.s = (-5,5)$

$* \quad (x+5) < 0 \quad \land \quad (x-5) > 0$

$x < -5 \quad \land \quad x > 5$

وفي هذة الحالة نحصل على تناقض مع المتباينة الاصلية . اذا مجموعة الحل تكون بالشكل الآتي:

$s.s = (-5,5)$

القيمة المطلقة : **Absolute Value**

- القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x يرمز لها بالرمز $|x|$ وتعرف كمايلي :

- $$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

خواص القيمة المطلقة:

$$1)\ |-a| = |a|$$
$$2)\ \big||a|\big| = |a|$$
$$3)\ |a\,.\,b| = |a|\,.\,|b|$$
$$4)\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$
$$5)\ |a+b| \leq |a| + |b|$$

برهان (3)

$$|a\,.b| = \sqrt{(a\,.b)^2} = \sqrt{a^2\,.b^2} = \sqrt{a^2}\,.\,\sqrt{b^2} = |a|\,.\,|b|$$

هندسياً القيمة المطلقة للعدد x هي المسافة بين 0 والعدد x على خط الاعداد وان المسافة تكون اكبر او تساوي صفر وهذا يعني $|x| \geq 0$
والمسافة بين x و y على خط الاعداد الحقيقية هي $|x-y|$.

القيمة المطلقة والفترات :

- $|x| < a \quad \leftrightarrow \quad -a < x < a$
- $|x| \leq a \quad \leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$
- $|x| > a \quad \leftrightarrow \quad x > a \;\; or \;\; x < -a$
- $|x| \geq a \quad \leftrightarrow \quad x \geq a \;\; or \;\; x \leq -a$

Example 3 : solve the following inequality $|2x - 3| \leq 1$.

Solution: $|2\,x - 3| < 1 \quad \rightarrow -1 \leq 2x - 3 \leq 1$

$\rightarrow 3 - 1 \leq 2x \leq 1 + 3$

$\rightarrow 2 \leq 2x \leq 4$

$\rightarrow 1 \leq x \leq 2$

$s.\,s = \{x \in R : \; 1 \leq x \leq 2\} = [1, 2]$

Exercises1 : solve the following inequalities:

1) $7 < 2x + 3 < 11$
2) $|7 - 4x| \geq 1$
3) $|2x - 3| > 1$
4) $x^2 > 25$

التفاضل والتكامل 1

المحاضرة الثالثة

تعريف الدالة : The function

و

المجال والمدى للدالة THE DOMAIN AND RANGE OF THE FUNCTION

تعريف الدالة : The function

لتكن A ,B مجموعتين غير خاليتين . ان العلاقة التي تربط كل عنصر ينتمي الى A بعنصر وحيد ينتمي الى B تسمى دالة .

f: A → B , $\forall\ x \in A,\ \exists\, y \in B \ni f(x) = y$

ملاحظة:1) تسمى المجموعة A مجموعة المجال (Domain) ويرمز لها بالرمز D_f .

2) تسمى المجموعة B مجموعة المجال المقابل (Co-Domain) .

3) مجموعة عناصر صور المجال في المجال المقابل تسمى مدى الدالة (Range) ويرمز لها بالرمز R_f

$$R_f = \{f(x) = y\ ;\ x \in D_f\}$$

بعض انواع الدوال :

1) تسمى الدالة متباينة (Injection , One – One) اذا كانت $f(a) \neq f(b) \rightarrow a \neq b$, $\forall\, a, b \in A$.

2) تسمى الدالة شاملة (Surjection , Onto) اذا كانت مدى الدالة = المجال المقابل .

3) تسمى الدالة f دالة ذاتية (Identity function) اذا كانت $f: A \rightarrow A,\ f(x) = x$.

4) الدالة الفردية (Odd function) تسمى f دالة فردية اذا كانت $f(-x) = -f(x)$, $f : A \to B$.

Example : $f(x) = x^3 + x$

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$$

5) الدالة الزوجية (Even function) تسمى الدالة f دالة زوجية اذا كانت $f(-x) = f(x)$, $f: A \to A$.

Example : $f(x) = x^2 + 4$

$$f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x)$$

6) متعددة الحدود (Polynomial function) تسمى الدالة f متعددة حدود اذا كانت على شكل :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

الدالة الثابتة (constant function) $If \ n = 0 \to f(x) = a_0$

الدالة الخطية (linear function) $If \ n = 1 \to f(x) = a_1 x + a_0$

الدالة الغير الخطية (nonlinear function) $If \ n = 2 \to f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

7) دالة القيمة المطلقة Absolut value function .

$$f(x) = |x| = f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = R \quad , \qquad R_f = R^+ \cup \{0\}$$

8) دالة الاشارة Sign function :

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1 & if \quad x > 0 \\ 0 & if \quad x = 0 \\ -1 & if \quad x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = R \quad , \qquad R_f = \{-1, 0, 1\}$$

(9 دالة الصحيح الاعظم The greatest integer function :

اذا كان x عدد حقيقي فأن [x] هو أكبر عدد صحيح لايزيد على x ويرمز لها بالرمز $f(x) = [x]$

[3.2]= 3 , [3.8]=3 , [3]=3 , [-5]= - 5 , [-0.5]= -1 , [-2.5] = -3

$$f(x) = \begin{cases} & \vdots \\ 2 & if \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & if \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & if \quad 0 \le x < 1 \\ -1 & if \quad -1 \le x < 0 \\ -2 & if \quad -2 \le x < -1 \\ & \vdots \end{cases}$$

$D_f = R$, $R_f = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = Z$

10) الدالة الكسرية Rational function :

اذا كانت $f : A \to B$ تسمى f دالة كسرية اذا كانت $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$.

11) الدالة الجذرية The root function :

$f : A \to B$, $y = \sqrt[n]{f(x)}$

- **تحديد المجال والمدى للدالة .**

1) متعددات الحدود والجذور التكعيبية مجالها كل الاعداد الحقيقية .

Example 1: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 5$

$D_f = R$, $R_f = R$

Example 2: $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$

$D_f = R$, $R_f = R$

2) المجال للدوال الجذور الزوجية مثل الجذور التربيعية

هو كل الاعداد الحقيقية التي تجعل المقدار تحت الجذر اكبر من او تساوي صفر.

Example 1: Find the Domain and Range of the function $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

$$x^2 - 9 \geq 0 \quad \rightarrow \quad (x-3)(x+3) \geq 0$$

اما

$$\rightarrow x - 3 \geq 0 \quad \wedge \quad x + 3 \geq 0$$

$$\rightarrow x \geq 3 \quad \wedge \quad x \geq -3$$

$$\rightarrow [3,\infty)$$

او

$$\rightarrow x - 3 \leq 0 \quad \wedge \quad x + 3 \leq 0$$

$$\rightarrow x \leq 3 \quad \wedge \quad x \leq -3$$

$$\rightarrow (-\infty, -3]$$

$$D_f = (-\infty, -3] \cup [3,\infty) = R \ \setminus \ (-3,3)$$

$$y = \sqrt{x^2 - 9} \rightarrow y^2 = x^2 - 9 \geq 0 \rightarrow y^2 \geq 0 \rightarrow R_f = R^+ \cup \{0\}$$

ملاحظة : بصورة عامة اذا كانت $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ فان $D_f = R \ \setminus \ (-a, a)$

Example 2: **Find the Domain and Range of the function** $f(x) = \sqrt{3x-1}$

$$3x - 1 \geq 0 \quad \rightarrow \quad 3x \geq 1 \ \rightarrow x \geq \frac{1}{3}$$

$$D_f = \left[\frac{1}{3}, \infty\right) = \left\{x \in R, x \geq \frac{1}{3}\right\}$$

$$y = \sqrt{3x-1} \ \rightarrow \ y^2 = 3x - 1$$

$$\rightarrow 3x = \ y^2 + 1 \ \rightarrow x = \frac{y^2+1}{3}$$

$$R_f = R$$

التفاضل والتكامل 1

المحاضرة الرابعة

المجال والمدى للدالة

THE DOMAIN AND RANGE OF THE FUNCTION

3) مجال الدوال الكسرية هو كل الاعداد الحقيقية عدا التي تجعل المقام تساوي صفر .

Example 1: Find the Domain and Range of the function $f(x) = \frac{X}{X^2-1}$

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow (x-1)(x+1) = 0$$

$$D^f = R \setminus \{-1,1\}$$

$$y = \frac{x}{x^2-1} \rightarrow yx^2 - y = x$$

$$yx^2 - x - y = 0$$

نحل المعادلة بالنسبة ل x

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y^2}}{2y}$$

$$\rightarrow y \neq 0 \ , 1 + 4y^2 \geq 0$$

$$\rightarrow y^2 \geq 0$$

$$\rightarrow \ R_f = R \setminus \{0\}$$

Example 2: Find the Domain and Range of the function $f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{1-x}}$

$1 - x > 0 \quad \rightarrow \quad x < 1$

$D_f = (-\infty, 1)$

$2 - x = y\sqrt{1 - x}$

$(2 - x)^2 = y^2(1 - x)$

$4 - 4x + x^2 = y^2 - xy^2$

$x^2 - 4x + xy^2 + 4 - y^2 = 0$

$x^2 + (-4 + y^2)x + 4 - y^2 = 0$

$$x = \frac{-(-4 + y^2) \pm \sqrt{(-4 + y^2)^2 - 4(1)(4 - y^2)}}{2} = \frac{4 - y^2 \pm \sqrt{16 - 8y^2 + y^4 - 16 + 4y^2}}{2}$$

$$= \frac{4 - y^2 \pm \sqrt{y^4 - 4y^2}}{2}$$

$y^4 - 4y^2 \geq 0 \rightarrow y^2(y^2 - 4) \geq 0$

$y^2 \geq 0 \quad , \qquad y^2 - 4 \geq 0$

$R_f = R \setminus (-2,2)$

Example 3: Find the Domain and Range of the function $f(x) = \begin{cases} -1\ , & x \le 2 \\ 3\ , & x > 2 \end{cases}$

$D_f = R \quad , \quad R_f = \{-1,3\}$

Example 4: Find the Domain and Range of the function $f(x) = |x+3|$

$$f(x) = |x+3| = \begin{cases} x+3 & \rightarrow & x+3>0\ , & x>-3 \\ 0 & \rightarrow & x+3=0\ , & x=-3 \\ -(x+3) & \rightarrow & x+3<0\ , & x<-3 \end{cases}$$

$D_f = R \quad , \quad R_f = R^+ \cup \{0\}$

Example 5: Find the Domain and Range of the function

$$f(x) = \begin{cases} x & if & x<-2 \\ x-1 & if & -2 \le x \le 1 \\ x^2 & if & x>1 \end{cases}$$

$$x<-2 \quad \vee \quad -2 \le x \le 1 \quad \vee \quad x>1$$
$$(-\infty,-2) \cup [-2,1] \cup (1,\infty) = R = D_f$$

$$y<-2 \quad \vee \quad -3 \le y \le 0 \quad \vee \quad y>1$$
$$(-\infty,-2) \cup [-3,0] \cup (1,\infty) = R \setminus (0,1] = R_f$$

Exercises 2 : Find the Domain and Range for the following functions:

(1) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

(2) $f(x) = \frac{1}{x^2+1} + 3$

(3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$

(4) $f(x) = |x - 2|$

(5) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 2}$

العمليات على الدوال :

لتكن كل من f , g دالتين مختلفتين فأن

1) $(f \mp g)_x = f(x) \mp g(x)$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g$

2) $(f.g)_x = f(x) . g(x)$

$D_{f\,.\,g} = D_f \cap D_g$

3) $\left({}^{f}\!/_{g}\right)_x = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , g(x) \neq 0$

$D_{f/g} = D_f \cap D_g \setminus \{x \in R: \; g(x) = 0\}$

تعجيل الدوال:

اذا كانت f, g دالتين بحيث ان مدى الدالة g مجموعة جزئية من مجال الدالة f فان توجد دالة (fog) تعرف كماياتي :

$$(fog)_x = f\big(g(x)\big)$$

$$D_{fog} = \{x;\ \ g(x) \in D_f\ \wedge x \in D_g\}$$

$$(fog)_x \neq (gof)_x$$

Example 6 : if $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 1$ $find$ $f\,o\,g$, $g\ of$

$$(fog)_x = f\big(g(x)\big) = f(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$$

$$(gof)_x = g\big(f(x)\big) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

Exercises 3 : Find f o g , g o f for the following functions :

1) $f(x) = \sqrt{x-4}$, $g(x) = \frac{x+1}{3-x}$

2) $f(x) = |x|$, $g(x) = x$

3) $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $g(x) = \frac{x-1}{x}$

4) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 1$

5) if $f(x) = 2\,x + 1$ $\;find\;\; g(x)\;\; such\, that\;\; (fog)_x = x^3$

التفاضل والتكامل 1

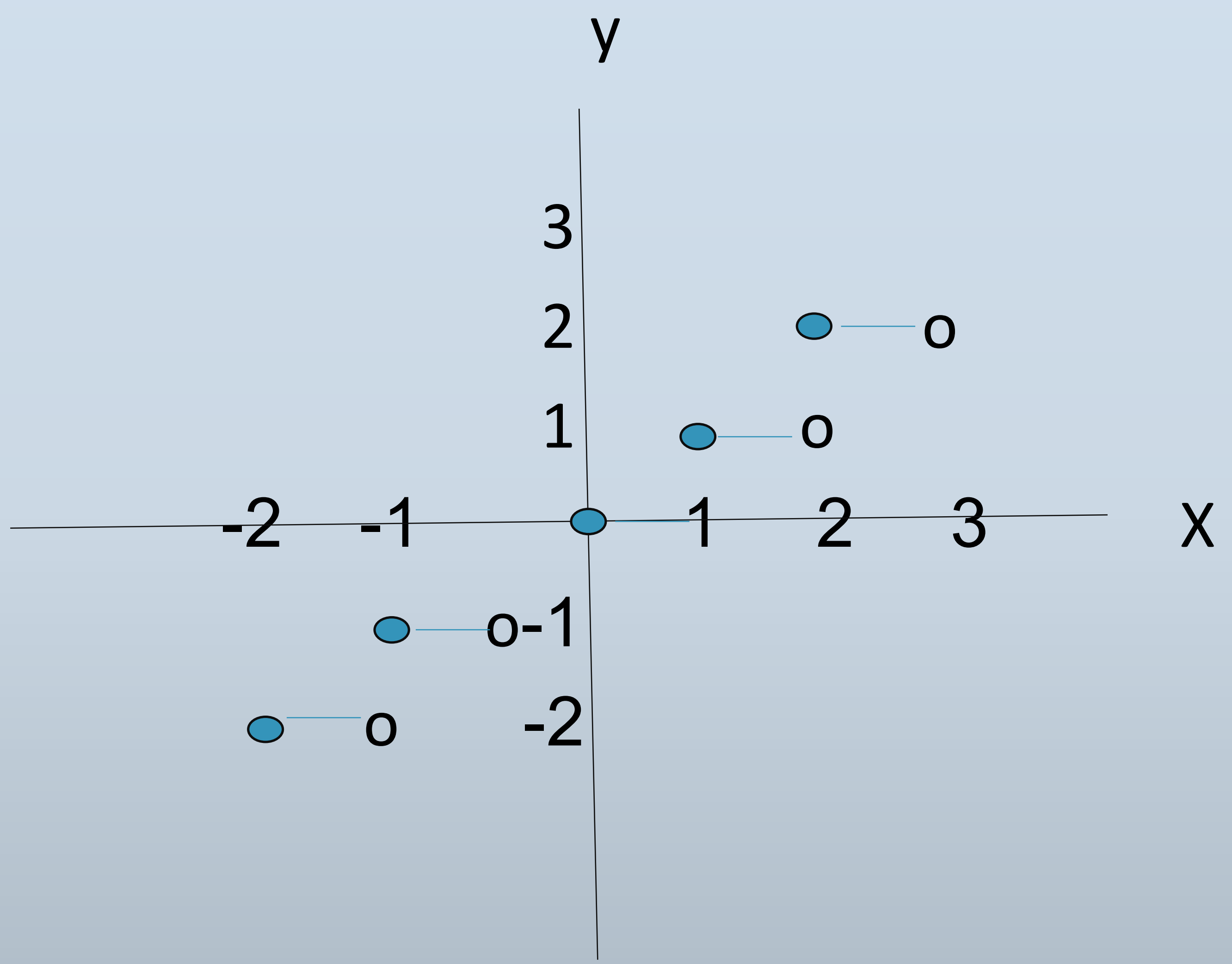
المحاضرة الخامسة

رسم مخطط الدوال

1- دالة الصحيح الاعظم: لرسم هذة الدالة نكون الجدول التالي.

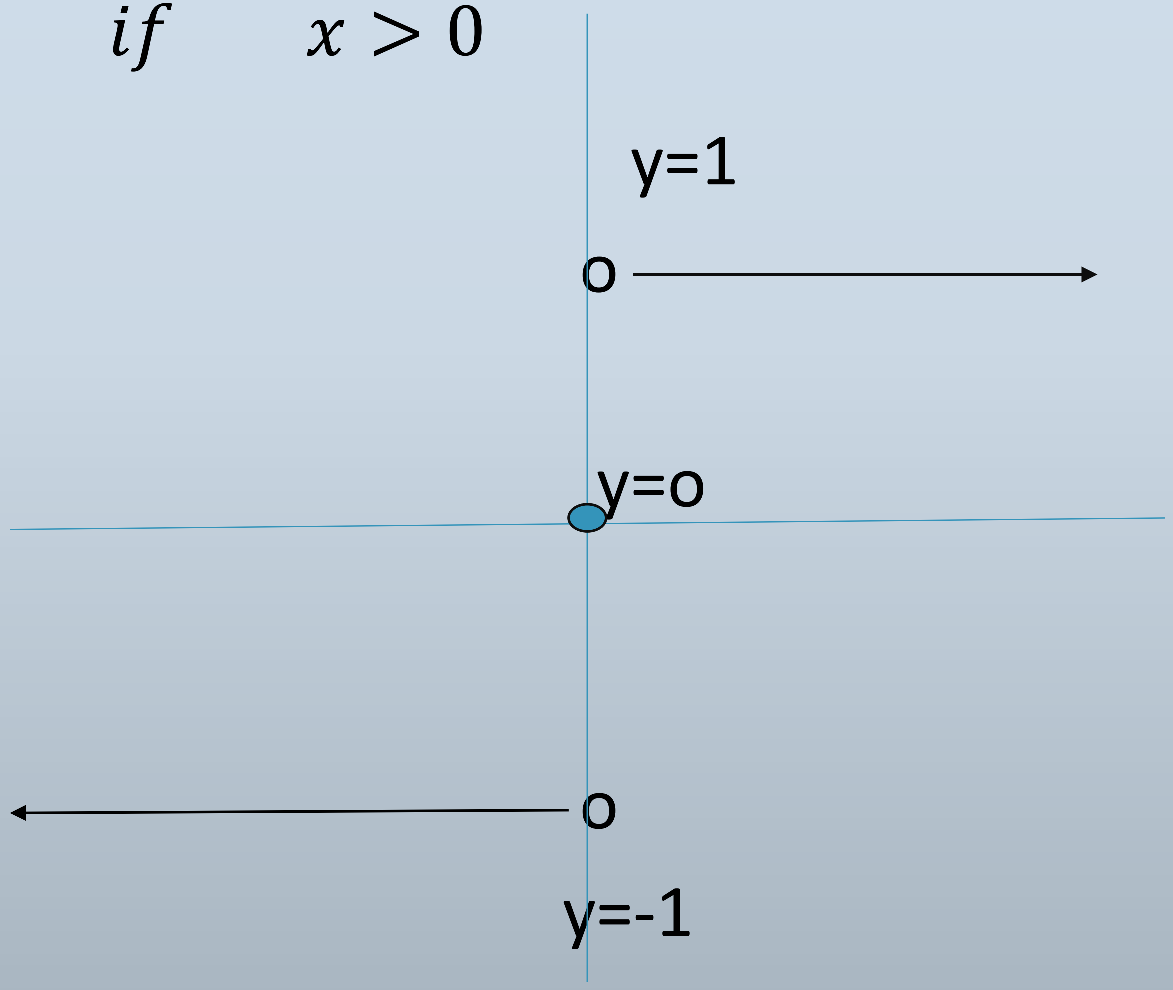
$$f(x) = [x]$$

[x]	x
2	$2 \leq x < 3$
1	$1 \leq x < 2$
0	$0 \leq x < 1$
-1	$-1 \leq x < 0$
-2	$-2 \leq x < -1$



دالة الاشارة :

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & if \quad x < 0 \\ 0 & if \quad x = 0 \\ 1 & if \quad x > 0 \end{cases}$$



لرسم منحنى الدالة او لبيان الدالة يجب معرفة عدد من النقاط التي تنتمي الى المنحني لتسهيل عملية الرسم. ويعتمد عدد النقاط على نوع الدالة . فالدالة الخطية (معادلة المستقيم) نحتاج لرسمها الى نقطتين فقط اما الدالة التربعية فأننا نحتاج على الاقل الى ثلاث نقط لرسمها. كلما كان شكل الدالة فيه نوع من التعقيد فأننا نحتاج الى نقاط اكثر. وهنالك بعض الدوال لايمكن رسمها هنا نرسم نوع معين من الدوال رسمها مشابه لرسم دوال اخرى يمكن رسمها بسهولة.

فأذا كانت $x \in R$, $y = f(x)$ دالة يمكن رسمها بسهولة فـأن :

ازاحة الى الاعلى c من الوحدات $g_1(x) = f(x) + c$

ازاحة الى الاسفل c من الوحدات $g_2(x) = f(x) + c$

ازاحة الى اليسار c من الوحدات $g_3(x) = f(x + c)$

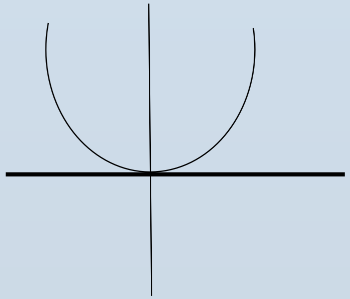
ازاحة الى اليمين c من الوحدات $g_4(x) = f(x - c)$

انعكاس حول المحور x $g_5(x) = -f(x)$

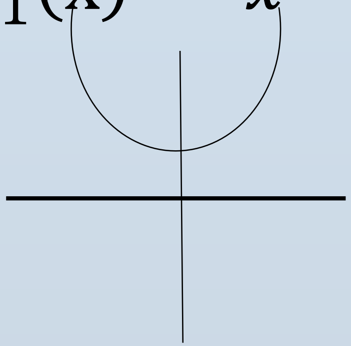
انعكاس حول المحور y $g_6(x) = f(-x)$

Example 1: $f(x) = x^2 \quad , c = 1$

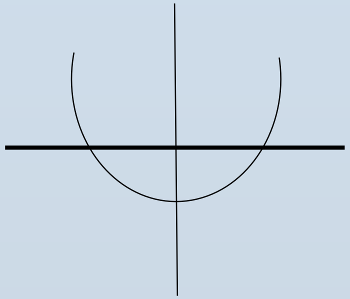
$f(x) = x^2$



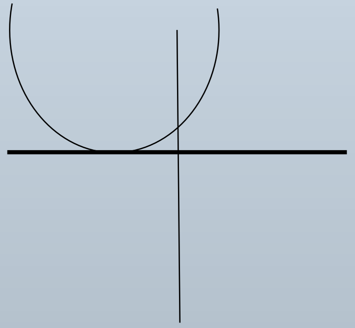
$g_1(\mathrm{x}) = x^2 + 1$



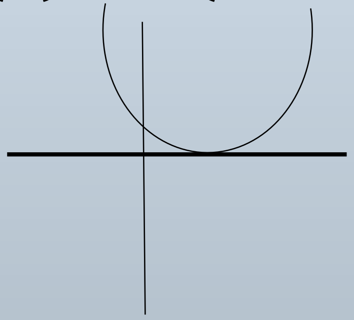
$g_2(\mathrm{x}) = x^2 - 1$



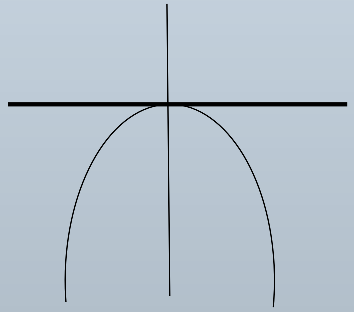
$g_3(\mathrm{x}) = (x + 1)^2$



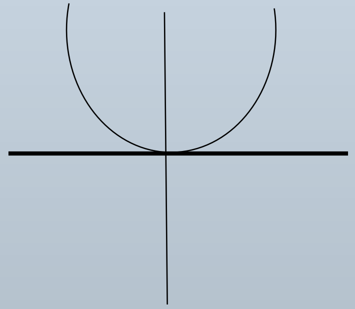
$g_4(\mathrm{x}) = (x - 1)^2$



$g_5(\mathrm{x}) = -x^2$



$g_6(\mathrm{x}) = (-x)^2$

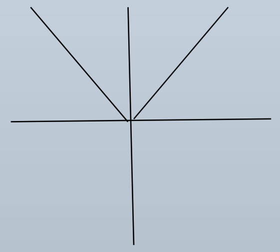


Example 2: Sketch the following function $f(x) = -|2-x| + 4$

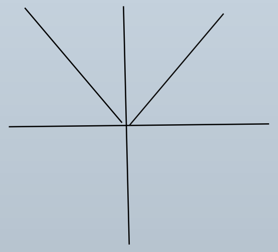
لرسم مثل هذه الدالة نلاحظ ماياتي :

1) $g_1(x) = |x|$
2) $g_2(x) = |-x|$
3) $g_3(x) = |2-x|$
4) $g_4(x) = -|2-x|$
5) $g_5(x) = -|2-x| + 4$

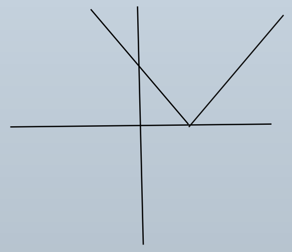
1)



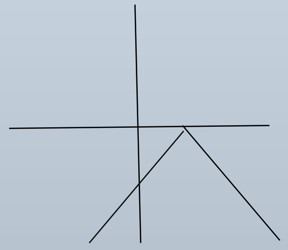
2)



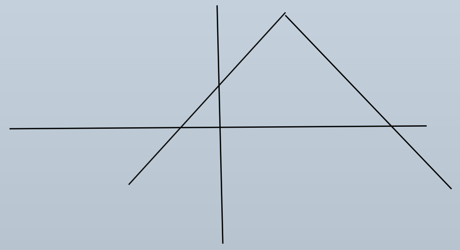
3)



4)



5)



Exercises 4 : Sketch the following functions:

1) $f(x) = -(4+x)^3$

2) $f(x) = |x+2| - 3$

التفاضل والتكامل 1

المحاضرة السادسة

الغاية

The limit

تعريف: لتكن f دالة حقيقية مجالها D ولتكن a عددا حقيقياً يقال ان غاية الدالة f عند a هي L بحيث ان

$$\forall x \in D,\ |x-a| < \epsilon \rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$$

وتكتب باختصار $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Example: Find the limit of the function $f(x) = x^2 + 3$ as x approaches 2.

من جهة اليمين

x	3	2.5	2.1	2.01	2.001	2.0001
f(x)	12	9.25	7.44	7.040	7.004	$7.0007 \simeq 7$

من جهة اليسار

x	1	1.2	1.5	1.9	1.99	1.999
f(x)	4	4.44	5.95	5.98	6.98	$6.999 \simeq 7$

نستطيع ان نستنتج من المثال اعلاه انه عندما x تقترب من 2 من جهة اليمين واليسار فان f(x) تقترب من 7.

$$\rightarrow \lim_{x\to 2}(x^2+3) = 7$$

وحداينة الغاية : اذا كان للدالة f(x) غاية عندما تقترب x من a فأن هذه الغاية تكون وحيدة.

- اذا كانت f(x) الدالة الذاتية f(x)=x فأن لاي قيمة a $\lim_{x\to a} f(x) = a$
- اذا كانت f(x) الدالة الثابتة f(x)=c فأن لاي قيمة a $\lim_{x\to a} f(x) = c$
- **خواص الغاية :**

if $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{\times\to a} f_2(x) = L_2$

1) $\lim_{x\to a}[f_1 \mp f_2] = L_1 \mp L_2$

2) $\lim_{x\to a} f_1 .f_2 = L_1. L_2$

3) $\lim_{x\to a} k\, f_1(x) = k \lim_{x\to a} f_1(x) = k\, L_1$

4) $\lim_{x\to a} \frac{f_1}{f_2} = \frac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$

- لحساب الغاية فأننا أولا نقوم بالتعويض المباشر في الدالة فأذا كانت قيمة الغاية بعد التعويض كمية غير معرفه (صفر في المقام والبسط , كمية سالبة تحت الجذر التربيعي) فأننا نلجأ الى عملية التحليل والاختصار او الضرب في مرافق المقام او البسط ومن ثم نحسب الغاية.

Example 1: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Solution: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4$

Example 2: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$

Solution: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x\,(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{x+3-3} = 2\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$$

Example 3: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-3x^2+3x-9}{x^3-4x^2+5x-6}$

Solution: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-3x^2+3x-9}{x^3-4x^2+5x-6}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)\,(x^2+3)}{(x-3)\,(x^2-x+2)}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x^2+3)}{(x^2-x+2)} = \dfrac{9+3}{9-3+2}$

$= \dfrac{12}{8}$

$x^2 + 3$

x-3 $\;\cancel{x^3} - \cancel{3x^2} + 3x - 9$

$- \;\cancel{x^3} \overset{+}{-} \cancel{3x^2}$

$\cancel{3x-9}$

$- \;\cancel{3x \overset{+}{-} 9}$

0

Example 4: $\lim\limits_{h \to 5} \dfrac{\sqrt{4+h}-3}{h}$

Solution: $\lim\limits_{h \to 5} \dfrac{\sqrt{4+h}-3}{h} = \dfrac{\sqrt{9}-3}{5} = \dfrac{0}{5} = 0$

التفاضل والتكامل 1

المحاضرة السابعة

الغاية

The limit

• الغاية من جهة اليمين والغاية من جهة اليسار :

الغياية من جهة اليمين $\lim_{x \to c^+} f(x)$

الغياية من جهة اليسار $\lim_{x \to c^-} f(x)$

$\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة وتساوي L اذا كانت $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$

Example 1: show that $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Example 2: Calculate the limit of the function

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq 2 \\ 8 - 2x & , \quad x > 2 \end{cases}$$

When $x \to 2$.

Solution:

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 8 - 2x = 8 - 4 = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

- اذا كان المقام يساوي صفر والبسط لايساوي صفر ولاتوجد اي طريقة للتحليل و الاختصار فأن الغاية غير موجود وتساوي (∞) وتسمىٔ الغاية اللانهائية.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{5(x-3)}{(x+2)^2\sqrt{x+4}} = -\infty$$

• عندما تكون الدالة على شكل جذر زوجي وكان x يقترب من a وهو بداية مجال الدالة فان الغاية غير موجودة لانة لايمكن ان نحسب الغاية من جهة اليسار.

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=\sqrt{0}=0\quad,\quad \lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}$$ غير موجودة

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\neq\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$$ غير موجودة

Example 3: Find $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^3-8}$

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^3-8}=\sqrt[3]{8-8}=0$$

Example 4: Find $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt{2-2}}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$ غير موجودة

$$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$$ غير موجودة

Exercises 5 :

1) Find the limit of the function $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

when x = 3 , x = - 3 , x = 0

2) Find the limit if it exists $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{2x^2 - 3x - 9}$

3) Find the limit of the function $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leq 1 \\ 2 + x^2, & x > 1 \end{cases}$

when x = 3 , x = -1 , x = 1

التفاضل والتكامل 1

المحاضرة الثامنة

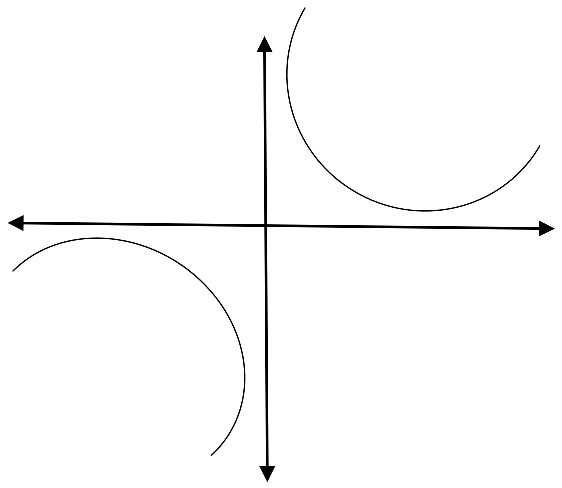
الغاية في اللانهاية

The limit in infinity

الغاية في اللانهاية:

1) $\lim_{x\to\infty^{+}} \frac{1}{x} = 0$

1) $\lim_{x\to\infty^{-}} \frac{1}{x} = 0$



ان العمليات $\left(\frac{\infty}{\infty}\ , \frac{0}{0}, 0.\infty\ , \infty + \infty -\right)$ غير مسموح بها لانها كميات غير معرفه .

لحساب الغاية عندما x تقترب من ∞ في الدوال الكسرية نتتبع ما يأتي :

1- اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام فأن الغاية غير موجودة.

2- اذا كانت درجة البسط = درجة المقام فأن الغاية موجودة وتساوي $\frac{\text{معامل اكبر قوة في البسط}}{\text{معامل اكبر قوة في المقام}}$

3- اذا كانت درجة البسط اصغر من درجة المقام فأن الغاية موجودة وتساوي صفر.

ملاحظة : لحساب الغاية فأننا نقسم البسط والمقام على اكبر قوة ل x موجودة في المقام.

Example 1: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2}{2x^2-7x+5}$

Solution: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-2}{2x^2-7x+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{2 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{0+0}{2-0+0} = \frac{0}{2} = 0$

Example 2: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{5x^2+1}$

Solution: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{5x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1+0+0}{5+0} = \frac{1}{5} = 0$

Example 3: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+2}{x^2+1}$

Solution: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\infty+1+0}{1+0} = \frac{\infty}{1} = \infty$

Example 4: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10}$

Solution: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4x + \frac{7}{x}}{2 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}} = \frac{-\infty+0}{2-0-0} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

Example 5: Find the limit of the function f(x) at $(-\infty, \infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & if \quad x < 0 \\ -1 & if\ x \geq 0 \end{cases}$$

Solution: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (-1) = -1$

Example 6 : $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^6 + 5x^3} - x^3\right)$

Solution: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\left(\sqrt{x^6 + 5x^3} - x^3\right) \frac{\sqrt{x^6+5x^3}+x^3}{\sqrt{x^6+5x^3}+x^3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^6+5x^3-x^6}{\sqrt{x^6+5x^3}+x^3}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3}{\sqrt{x^6+5x^3}+x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x^3}}+1} = \frac{5}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{5}{2}$$

- اذا كانت $f(x)$ متعددة حدود . لحساب الغاية عندما x تقترب من ∞ او $-\infty$ فأننا نستخرج الحد الذي يمتلك اكبر اس عامل مشترك ثم نعوض عن x في ∞ أو $-\infty$ ونحسب الغاية .

Example 1: $\lim_{x\to-\infty}(3x^4 - x^2 + x - 7)$

Solution: $\lim_{x\to-\infty}(3x^4 - x^2 + x - 7)$

$= \lim_{x\to-\infty} x^4(3 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{7}{x^4})$

$=(-\infty)^4(3 - 0 + 0 - 0)$

$= \infty$

Example 2: $\lim_{x\to\infty}(2x^{11} - 5x^6 + 3x^2 + 1)$

Solution: $\lim_{x\to\infty}(2x^{11} - 5x^6 + 3x^2 + 1)$

$= \lim_{x\to\infty} x^{11}(2 - \frac{5}{x^5} + \frac{3}{x^9} + \frac{1}{x^{11}})$

$= \infty$

Exercises 6 : Find the limit of the following

1) $\lim_{x\to 1} \frac{x^4+3x^3-13x^2-27x+36}{x^2+3x-4}$

2) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+2x-4}{x^2-3x+3}$

3) $\lim_{x\to -\infty} (2+4x+3x^2-3x^3)$

4) $\lim_{x\to \infty} (7x^6-8x^5-4x^2+3x+1)$

5) $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

6) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{3x^2-2}$

التفاضل والتكامل 1

المحاضرة التاسعة

الاستمرارية

The continuity

تعريف : تكون الدالة f مستمرة عند النقطة a اذا وفقط اذا

1) f(a) موجوده

2) $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ملاحظة : تكون الدالة غير مستمرة عند النقطة a اذا لم يتحقق احد الشروط الثلاثة اعلاه.

Example 1: Is the function $f(x) = x^2 - 3$ continuous at x=2.

Solution: 1) $f(2) = 2^2 - 3 = 1$

2) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 1$

3) $\lim_{x \to 2} f(x) = f(x) = 1$

f مستمرة عند x=2 .

Example 2: Is the function $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3}, & x \neq -3 \\ -6, & x = -3 \end{cases}$ continuous at x=-3.

Solution : 1) $f(-3) = -6$

2) $\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x \to -3^-} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)} = -6$

$\lim_{x \to -3^+} -6 = -6$

$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+} f(x) = -6$

3) $\lim_{x \to -3} f(x) = f(-3) = -6$

$\leftarrow f$ مستمرة عند x=-3.

الاستمرارية عند نقطة في بداية ونهاية الفترة

* الدالة f(x) تكون مستمرة عند نقطة في بداية الفترة من جهة اليسار a اذا كان

1) $f(a)$ موجودة

2) $\lim_{x \to a^+} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

* الدالة f(x) تكون مستمرة عند نقطة في نهاية الفترة من جهة اليمين a اذا كان

1) $f(a)$ موجودة

2) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Example 3: Is the function $f(x) = \sqrt{x}$ continuous at x=0.

Solution:

$$D_f = \{x \in R : \quad x \geq 0\} = [0, \infty)$$

x=0 هو نقطة بداية فترة تعريف الدالة (مجال الدالة) D_f من جهة اليسار.

1) $\boldsymbol{f(0) = \sqrt{0} = 0}$ موجودة

2) $\boldsymbol{\lim_{x \to a^+} f(x) = \sqrt{0} = 0}$ موجودة

3) $\boldsymbol{\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = \sqrt{0} = 0}$

$\leftarrow f$ مستمرة عند x=0.

Example 3: Is the function $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ continuous at (1) x=$\frac{1}{2}$, (2) x=1.

Solution: (1) at x=$\frac{1}{2}$

يجب التأكد من ان x=$\frac{1}{2}$ تقع ضمن مجال الدالة f(x) او قد تكون نقطة في بداية ونهاية الفترة . لذلك نجد مجال الدالة f(x) .

$$x - x^2 \geq 0 \quad \rightarrow x(1-x) \geq 0$$

$* \rightarrow x \geq 0 \quad \wedge \quad 1 - x \geq 0$	$* \rightarrow x \leq 0 \quad \wedge \quad 1 - x \leq 0$
$\rightarrow 0 \leq x \leq 1$	$\rightarrow x \leq 0 \quad \wedge \quad x \geq 1$
$D_f = [0,1]$	$D_f = \emptyset$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \in D_f = [0,1]$$

$$\rightarrow 1)\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 2)\ \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \sqrt{x - x^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 3)\ \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

f مستمرة عند x=$\frac{1}{2}$.

2)   x=0

$\rightarrow$ 1) $f(0) = \sqrt{0-0} = 0$

$\rightarrow$ 2) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \sqrt{x-x^2} = \sqrt{0-0} = 0$

$\rightarrow$ 3) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = f(0) = 0$

f مستمرة عند x=0 .

Example 4: Is the function $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 2, & x>1 \end{cases}$ continuous at x=1.

Solution: 1) $f(1)=1^2=1$

2) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1^2=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\to \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

$\leftarrow$ f غير مستمرة عند X=1

Example 5: If the function $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ k, & x=1 \end{cases}$ continuous at x=1. Find the value of k .

Solution: $f(1)=k$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

$$f(1)=\lim_{x\to 1} f(x) \quad \to \quad k=3$$

Exercises 7 :

1) Is the function $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ continuous at x=0.

2) Is the function $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$ continuous at x=2.

التفاضل والتكامل 1

المحاضرة العاشرة

الاستمرارية

The continuity

تعريف : الدالة f تكون مستمرة على الفترة المفتوحة (a , b) اذا كانت مستمرة عند كل نقطة من نقاط (a , b) .

تعريف : الدالة f تكون مستمرة على الفترة المغلقة [a , b] اذا كانت مستمرة على الفترة المفتوحة (a , b) وتكون الدالة معرفة عند a, b بحيث ان

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(a)\,,\ \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

ملاحظة : الدالة التي تكون على شكل متعددة حدود تكون مستمرة عند اي عدد حقيقي R .

Example 1: f(x) =3

تكون مستمرة عند اي عدد حقيقي R .

Example 2: f(x) = x

تكون مستمرة عند اي عدد حقيقي R .

Example 3: f(x) = $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

تكون مستمرة عند اي عدد حقيقي R .

ملاحظة : الدالة الكسرية التي على الشكل $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ تكون مستمرة عند كل عدد حقيقي R عدا التي تجعل قيمة q(x) صفر (اي المقام = صفر).

Example 4: Discuss the continuity of the function $f(x) = \frac{x^5+x^3-4x^2+2}{x^2-5x+6}$.

solution: $x^2-5x+6=0$

$$\rightarrow (x-3)(x-2)=0$$

$$x=2 \ , \ x=3$$

← الدالة مستمرة عند كل الاعداد الحقيقية عدا 3 , 2 .

Example 5: If $f(x) = \begin{cases} a & , \quad x = -3 \\ \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & , \quad -3 < x < 3 \\ b & , \quad x = 3 \end{cases}$

find a , b such that f(x) continuous at [-3, 3].

Solution :

عندما تكون f مستمرة على [-3 , 3]

$$\rightarrow \lim_{x\to -3^+} f(x) = f(-3) = a$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = b$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} = \lim_{x\to -3^+} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} \, \frac{4+\sqrt{x^2+7}}{4+\sqrt{x^2+7}}$$

$$= \lim_{x\to -3^+} \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{16-x^2-7} = \lim_{x\to -3^+} (4+\sqrt{x^2+7})$$

$$= 4+\sqrt{(-3)^2+7} = 8 = f(-3) = a \qquad \rightarrow \boxed{a = 8}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (4+\sqrt{x^2+7}) = 8 = f(3) = b \qquad \rightarrow \boxed{b = 8}$$

الخواص الجبرية للدوال المستمرة :

- اذا كانت f, g دالتين مستمرتين عند $x=a$ فأن $\left(f \pm g\ ,\ f.g\ ,\ \frac{f}{g}\ , g \neq 0\right)$ تكون ايضاً مستمرة عند $x=a$.
- اذا كانت f دالة مستمرة عند $x = x_0$ و $\lim_{x\to x_0} g(x) = d$ فأن

$$\lim_{x\to x_0}(f\ .g)_x = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(d)$$

Example 6: If $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ \ g(x) = 2(2-x) + x^3$

find $\lim_{x\to 3}(f \circ g)_x$

Solution: $(f \circ g)_x = f\big(g(x)\big) = f\big(2(2-x) + x^3\big)$

$$= \sqrt{2(2-x) + x^3}$$

$$\lim_{x\to 3}(f \circ g)_x = \lim_{x\to 3}\sqrt{2(2-x) + x^3} = \sqrt{-2+27} = \sqrt{25} = 5$$

- مبرهنة القيمة المتوسطة .

اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة [a , b] وكان k عدداً بين f(a) , f(b) فأن هناك x تنتمي الى (a ,b) بحيث f(x)=k

- هذه المبرهنة لها نتائج عديدة احداها ايجاد جذور المعادلة .

نتيجة : اذا كانت f مستمرة على الفترة [a , b] وكان $f(a)f(b) < 0$ فأن هناك x ينتمي الى (a , b) بحيث ان f(x)=0 .

Example 7: $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$

متسمرة ضمن الفترة [0 ,1] وان

f(0)=-1

f(1)= 2 $\rightarrow$ $f(0)f(1) < 0$

← يوجد جذر للمعادلة ضمن الفترة [0, 1] .

Exercises 8 : If $f(x) = x^2 - 4x + 3$ continuous at [2, 4] are there roots for the equation within this interval .

Exercises 9 : Discuss the continuity of the following functions

1) $f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \geq 0 \\ 3x-4, & x < 2 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$

4) $f(x) = \sqrt{x-3}$

5) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

6) $f(x) = \frac{2+x}{x^2-5x+6}$

التفاضل و التكامل 1

المحاضرة الحادي عشر

المشتقات

Derivatives

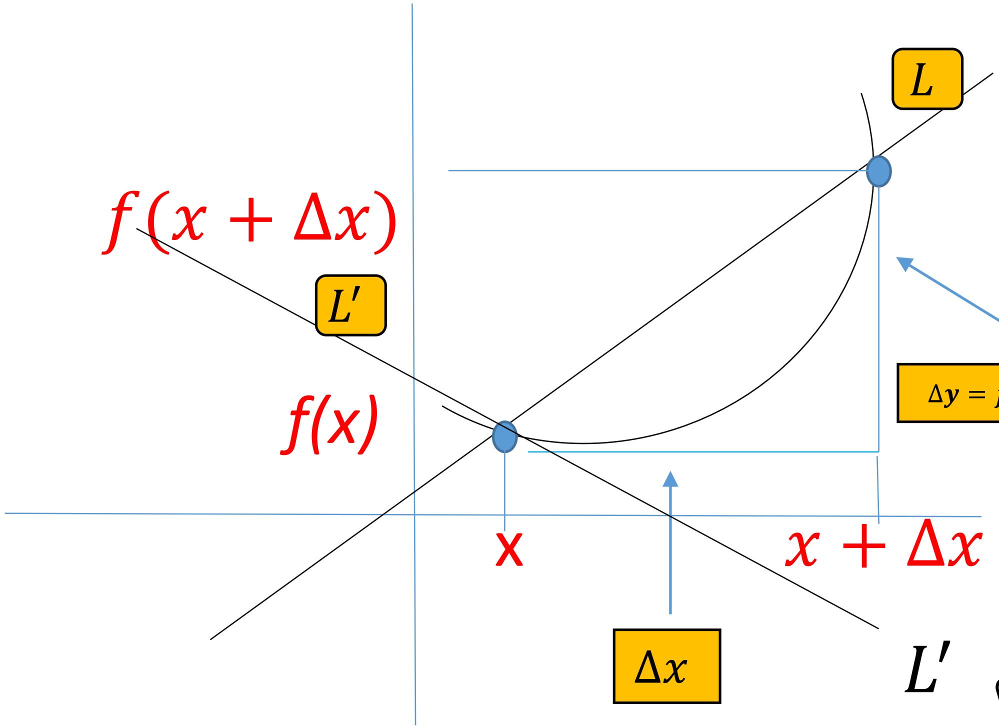
المشتقة الاولى :

نفرض ان $(x, f(x))$ نقطة على منحني الدالة $y=f(x)$ ونفرض

ان $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ نقطة اخرى على منحني الدالة

$y=f(x)$ حيث ان Δx هي الفرق بين الاحداثي x للنقطتين .

فأن ميل المستقيم L المار بالنقطتين هو



$$M_L = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-(x)} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

نلاحظ بأن كلما قلة قيمة Δx فأن المستقيم L يقترب من المستقم L'

فأذا اقتربت Δx من الصفر فأن المستقيم L ينطبق على المستقيم L'

وان ميل المستقيم L = ميل المستقيم L' لذلك يكون ميل المماس للمنحي

$Y=f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$ هو

$$\boxed{\mathbf{M} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

تسمى العلاقة اعلاة بالمشتقة الاولى ويرمز لها بالرمز $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, y'

- نقول ان f(x) دالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b) اذا كانت f قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقط (a , b) .
- عندما تكون الغاية في العلاقة السابقة موجودة فأن الدالة f(x) تسمى قابلة للاشتقاق وان $f'(x)$ تسمى مشتقة الدالة الاولى .

Example 1: Using the definition of the derivative to find the derivative of the function $f(x) = 4x - 2$.

Solution: $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x+\Delta x) - 2 - (4x-2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x + 4\Delta x - 2 - 4x + 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4\Delta x)}{\Delta x} = 4$$

Example 2: Using the definition of the derivative to find the derivative of the function $f(x) = x^2 + 1$.

Solution: $y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 1 - (x^2+1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Example 3: Using the definition of the derivative to find the derivative of the function $f(x) = \sqrt{x}$.

Solution: $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \; \frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مبرهنة : اذا كانت f(x) دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 فأن f(x) تكون مستمرة عند x_0.

ملاحظة : ان معكوس هذه المبرهنة ليس صحيح . هذا يعني ان ليست كل دالة مستمرة عند نقطة هي قابلة الاشتقاق عند تلك النقطة .

Example 4 : $f(x) = |x| \quad , \quad x = 0$

Solution: $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\begin{cases} \Delta x , & \Delta x \geq 0 \\ -\Delta x, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

$\rightarrow L^+ \neq L^- \quad \rightarrow \quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x)$ غير موجود

f(x) غير قابلة للاشتقاق

Exercises 9 : Using the definition of the derivative to find the derivative of the following functions

1) $f(x) = Ax + B$
2) $f(x) = x^3$
3) $f(x) = \frac{1}{x}$
4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

التفاضل والتكامل 1

المحاضرة الثانيه عشر

قواعد المشتقة

Derivative rules

• قواعد المشتقة

1) $If\ f(x) = c\ \rightarrow\ f'(x) = 0$

2) $If\ f(x) = x^n\ ,\ n \in R\ \rightarrow\ f'(x) = nx^{n-1}$

3) $If\ f(x) = c\ g(x)\ , c\ \ is\ a\ constant\ number \rightarrow\ f'(x) = c\ g'(x)$

4) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

5) $[f(x).g(x)]' = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$

6) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

7) $y = [f(x)]^n \rightarrow y' = n\,[f(x)]^{n-1}\ .\ \ f'(x)$

Examples:

1) $f(x) = 4 \rightarrow \quad f'(x) = 0$
2) $f(x) = x \rightarrow \quad f'(x) = 1$
3) $f(x) = 3x \rightarrow \quad f'(x) = 3$
4) $f(x) = x^3 \rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$
5) $f(x) = 2x^7 \rightarrow \quad f'(x) = 14x^6$
6) $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \rightarrow \quad f'(x) = -3\,x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$
7) $f(x) = \frac{3}{x^5} = 3x^{-5} \rightarrow \quad f'(x) = -15x^{-6} = \frac{-15}{x^6}$
8) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
9) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow \quad f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$10)\ y = 6x^2 + x^5 + x^3 - 4 \ \rightarrow\ y' = 12x + 5x^4 + 3x^2$

$11)\ y = (x^2 + 2)(x^3 - 5)$

$$
\begin{aligned}
y' &= (x^2 + 2)(3x^2) + (x^3 - 5)(2x) \\
&= 3x^2\,(x^2 + 2) + 2x\,(x^3 - 5) \\
&= 3x^4 + 6x^2 + 2x^4 - 10x \\
&= 5x^4 + 6x^2 - 10x
\end{aligned}
$$

$12)\ y = \frac{x}{x-1}$

$$y' = \frac{(x-1)(1) - x\,(1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$13)\ y = \frac{\sqrt{x}+2x}{\sqrt{x}-4} = \frac{x^{\frac{1}{2}}+2x}{x^{\frac{1}{2}}-4}$

$$y' = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+2\right)-\left(x^{\frac{1}{2}}+2x\right)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)^2} = \frac{\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+2\right)-\left(\frac{1}{2}+x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)^2}$$

14) $y = (x^2 - 5)^4 \rightarrow y' = 4(x^2 - 5)^3(2x)$

$$= 8x(x^2 - 5)^3$$

15) $y = (x^3 + 2x + 3)^{\frac{11}{9}} \rightarrow y' = \frac{11}{9}(x^3 + 2x + 3)^{\frac{2}{9}}(3x^2 + 2)$

16) $y = \sqrt{2 - x^2} = (2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}(2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$$

Exercises 10 : Find the derivative of the following functions.

1) $y = \left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)^4$

2) $y = \left(2\sqrt{x} - 1\right)^3$

3) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

4) $y = \left(x^3 + 2\right)^2\left(1 - x^2\right)^3$

5) $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x}}$

6) $y = x^3 - \frac{1}{x^2+1}$

7) $y = x^2\left(x^2 + 1\right)^{-\frac{1}{3}}$

- قاعدة السلسلة :

1) Let $y = f(t)$, $t = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

2) Let $y = f(t)$, $x = g(t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Example 1 : if $y = 2t^2 - 1$, $t = 2x$ find $\frac{dy}{dx}$

Solution: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (4t)(2) = (4(2x))(2) = 16x$

Example 1 : if $y = t^2 - 1$, $x = 2t + 3$ find $\frac{dy}{dx}$

Solution: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{2} = t = \frac{x-3}{2}$

Exercises 11 : Find the derivative of the following functions.

1) $y = u^3 + 1$, $u = x^2 + 3$

2) $y = \frac{t^2}{1+t}$, $x = \frac{t}{2+t}$

3) $y = z^{\frac{2}{3}}$, $z = x^2 + 1$

4) $y = w^2 - w^{-1}$, $\mathrm{w} = 3\mathrm{x}$

5) $y = t^2$, $x = \frac{t}{1-t}$

6) $y = \frac{u^2}{u^2+1}$, $u = \sqrt{2x + 1}$

التفاضل والتكامل 1

المحاضرة الثالثة عشر

الاشتقاق الضمني واشتقاق المراتب العليا

Implicit derivative and higher order derivation

- الاشتقاق الضمني :

اذا كانت الدالة y=f(x) فأنه من السهوله ايجاد المشتقة الاولى بأستخدام قواعد الاشتقاق السابقة اما اذا كانت y ضمن علاقة او معادلة يصعب التعبير عنها بدلالة x مثل

$$3y^2x^2 + 6y\,x - 5x^2 = 10$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

لذلك لايجاد المشتقة y' من الدالة الضمنية نعتبر y هي دالة ل x ونطبق قواعد الاشتقاق السابقة .

Example : Find y' of the equation $x^3 + 4y^3 - xy^2 + 7x = 10$.

Solution : $3x^2 + 12y^2y' - [x(2yy') + y^2] + 7 = 0$

$$3x^2 + 12y^2y' - 2xyy' - y^2 + 7 = 0$$

$$(12y^2 - 2xy)y' + (3x^2 - y^2 + 7) = 0$$

$$y' = \frac{(3x^2 - y^2 + 7)}{(12y^2 - 2xy)}$$

Exercises 11 : Find $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$ of the following functions.

1) $x^3y^2 + 2xy - x + 3y = 6$

2) $x^2 + x^3 = y + y^4$

3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = x + y$

4) $x^2 - \sqrt{xy} + y^2 = 6$

5) $x^3 + y^3 - 9xy = 0$

6) $x^2y + yx^2 = 3y^3$

7) $2 - y^3 + x^2y = 5$

- **اشتقاق المراتب العليا :**

اذا كانت f(x) دالة قابلة للاشتقاق فأن $f'(x)$ مشتقتها الاولى هي دالة جديدة للمتغير X . فأذا كانت $f'(x)$ قابلة للاشتقاق ايضاً فأنه يطلق على مشتقتها المشتقة الثانية للدالة الاصلية f(x) ويرمز لها بالرمز (x) f'', y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$ وبذلك فأن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

وبالمثل تعرف المشتقة الثالثة (ان وجدت) بأنها مشتقة المشتقة الثانية وهكذا بالنسبة للمشتقات الرابعة والخامسة .

المشتقة الثانية

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

المشتقة الثالثة

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$\vdots$$

المشتقة من الرتبة n

$$y^n = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Example : Find $y^{(5)}$ $of\ the\ function$ $y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$

Solution: $y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

$$y''' = 24x + 30$$

$$y^{(4)} = 24$$

$$y^{(5)} = 0$$

- **Derivatives of Trigonometric Function**

$$1)\ y = sinx \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = cosx\ .(x')$$

$$2)\ y = cosx \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = -sinx\ .(x')$$

$$3)\ y = tanx \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = sec^2x\ .(x')$$

$$4)\ y = cotx \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = -csc^2x\ .(x')$$

$$5)\ y = secx \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = secx\, tanx\, .(x')$$

$$6)\ y = cscx \quad \rightarrow \frac{dy}{dx} = -cscx\, cotx\, .(x')$$

Example 1: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = x^2 - sinx \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - cosx$

Example 2: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = x^2 sinx \rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2\, cosx + sinx\, .2x$

Example 3: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = \frac{sinx}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\, .cosx - sinx\, .1}{x^2}$

Example 4: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = 5x + cosx \rightarrow \frac{dy}{dx} = 5 - sinx$

Example 5: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = sinx\, cosx \rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x\, (-\sin x) + \cos x \cos x$$

$$= -sin^2 x + cos^2 x$$

Example 6: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = tanx^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = sec^2 x^2 . (2x)$

Example 7: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = \frac{x}{1+\cot 2x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1+cot2x).1 - x\,(-csc^2 2x).2}{(1+\cot 2x)^2}$

Example 8: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = secx^3 + csc2x^2$

$$\frac{dy}{dx} = secx^3\, tanx^3\; .3x^2 - csc2x^2\, .cot2x^2\, .(4x)$$

- **Natural logarithm function (Ln x)**

$$y = Ln\,x \;\rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\,.\,x'$$

- Rules of Natural logarithm function

For any positive numbers a and x , for any exponent n ,

1) $\ln ax = \ln a + \ln x$

2) $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$

3) $\ln \frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = -lnx$

4) $\ln x^n = n \ln x$

Example1: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = \ln\sqrt{\cos x} \rightarrow y = \frac{1}{2}\ln\cos x$

Solution: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos x}.(-\sin x)$

Example2: Find $\frac{dy}{dx}$ of $y = \ln(3x^2+4)$

Solution : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2+4}\,.\,6\,x$

Example3: Find $\frac{dy}{dx}$ of y= $ln\sqrt[3]{x+1}$

$\rightarrow y = ln\,(x+1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow y = \frac{1}{3}ln(x+1)$

Solution : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)}.(1) = \frac{1}{3(x+1)}$

- **The Exponential function exp(x) = e^x**

e= 2.7182818459045

$$y = e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x . (x')$$

For all real number x , x_1 and x_2

1) $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$

2) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

3) $\frac{e^{x_1}}{e^{x2}} = e^{x_1 - x_2}$

4) $e^{lnx} = x$

Example1: $y = e^{x^2}$

Solution: $\frac{dy}{dx} = e^{x^2}$ **. 2x**

Example2: $y = e^{\ln \sin x}$

Solution : $\frac{dy}{dx} = e^{\ln \sin x} . \frac{1}{\sin x} . \cos x = \frac{\sin x}{\sin x} . \cos x = \cos x$

Or $y = e^{\ln \sin x} \rightarrow y = \sin x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x$

Example3: y= e^{tan3x^2}

Solution : $\frac{dy}{dx} = e^{tan3x^2} . sec^2 3x^2 . 6x$

- **The derivative of a^x**

$$y = a^x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a^x \ln a \, . (x')$$

Example1 : $y = 3^{-x}$

Solution : $\frac{dy}{dx} = 3^{-x} \ln 3 \, . (-1) = -\ 3^{-x} \ \ln 3$

Example2 : $y = 3^{\sin x}$

Solution : $\frac{dy}{dx} = 3^{sinx} \ \ln 3 \, . (\cos x\ )$

- **The inverse Trigonometric functions :**

1) $y = \text{arc}\sin x = sin^{-1} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x'}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $y = \text{arc}\cos x = cos^{-1} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x'}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $y = \text{arc}\tan x = tan^{-1} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{1+u^2}$

4) $y = \text{arc}\cot x = cot^{-1} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-u'}{1+u^2}$

5) $y = \text{arc}\sec x = sec^{-1} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$

6) $y = \text{arc}\csc x = csc^{-1} x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$

Example 1: Find $\frac{dy}{dx}$ of the function $y = sin^{-1}x^2$

Solution: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

Example 2: Find $\frac{dy}{dx}$ of the function $y = tan^{-1}\sqrt{x+1}$

Solution: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}.1}{1+\left(\sqrt{x+1}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1+x+1)} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(2+x)}$

Example 3: Find $\frac{dy}{dx}$ of the function $y = sec^{-1}(3x)$

Solution: $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{|3x|\sqrt{(3x)^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{9x^2-1}}$